上海市2002年中等学校高中阶段招生文化考试

数学试卷

（满分120分，考试时间120分钟）

考生注意：除第一、二大题外其余各题如无特别说明，都必须写出证明或计算的主要步骤．

一．填空题（本大题共14题，每题2分，满分28分）

1．计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ＝__________．

2．如果分式$\frac{x+3}{x-2}$无意义，那么x＝__________．

3．在张江高科技园区的上海超级计算中心内，被称为“神威1”的计算机运算速度为每秒384 000 000 000次，这个速度用科学记数法表示为每秒___________次．

4．方程$\sqrt{2x^2-1}=x$的根是__________．

5．抛物线$y=x^2-6x+3$的顶点坐标是 __________．

6．如果$f(x)=kx$，$f(2)=-4$，那么k＝__________．

7．在方程$x^2+\frac{1}{x^2-3x}=3x-4$中，如果设$y=x^2-3x$，那么原方程可化为关于$y$的整式方程是__________．

8．某出租车公司在“五一”长假期间平均每天的营业额为5万元，由此推断5月份的总营业额约为5×31＝155（万元）根据所学的统计知识，你认为这样的推断是否合理？答：__________．

9．在△ABC中，点D、E分别在边AB、AC上，$DE\parallel BC$，如果$AD=8$，$DB=6$，$EC=9$，那么AE＝__________．

10．在离旗杆20米处的地方用测角仪测得旗杆顶的仰角为a，如果测角仪高为1.5米，那么旗杆的高为__________米，（用含a的三角比表示）．

11．在△ABC中，如果$AB=AC=5$cm，$BC=8$cm，那么这个三角形的重心G到BC的距离是__________cm．

12．两个以点O为圆心的同心圆中，大圆的弦AB与小圆相切，如果AB的长为24，大圆的半径OA为13，那么小圆的半径为__________．

13．在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A<\angle B$，CM 是斜边 AB 上的中线，将$\triangle A$CM 沿直线 CM 折叠，点 A 落在点 D 处，如果 CD 恰好与 AB 垂直，那么$\angle A$ 等于__________度.

14．已知 AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，E、F 分别是边 AB、AC 的中点，连结 DE、DF，在不再连结其他线段的前提下，要使四边形 $AEDF$ 成为菱形，还需添加一个条件，这个条可以是__________.

二、多项选择题（本大题 4 题，每题 3 分，满分 12 分）

［每题列出的四个答案中，至少有一个是正确的，把所有正确答案的代号填入括号内，错选或不选得 0 分，否则每漏选一个扣 1 分，直至扣完为止］

15．在下列各数中，是无理数的是 （　　）

（A）π；　　（B）$\dfrac{22}{7}$；　　（C）$\sqrt{9}$；　　（D）$\sqrt{4}$.

16．在下列各组根式中，是同类二次根式的是 （　　）

（A）$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{12}$；　　（B）$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$；

（C）$\sqrt{4ab}$ 和 $\sqrt{ab^3}$；　　（D）$\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$.

17．如果两个半径不相等的圆有公共点，那么这两个圆的公切线可能是 （　　）

（A）1 条；　　（B）2 条；　　（C）3 条；　　（D）4 条

18．下列命题中，正确的是 （　　）

（A）正多边形都是轴对称图形；

（B）正多边形一个内角的大小与边数成正比例；

（C）正多边形一个外角的大小随边数的增加而减少；

（D）边数大于 3 的正多边形的对角线长相等.

三、(大小题共 4 题，每题 7 分，满分 28 分)

19．计算：$\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-6}-\dfrac{2x+6}{x^2-9}$.

20．解不等式组：$\begin{cases}3x+1>5(x-1), & ① \\ \dfrac{4}{3}x-6\geq\dfrac{6-5x}{3}. & ②\end{cases}$

21．如图 1，已知四边形 $ABCD$ 中，$BC=CD=DB$，$\angle ADB=90°$，$\cos\angle ABD=\dfrac{4}{5}$，求 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}$.

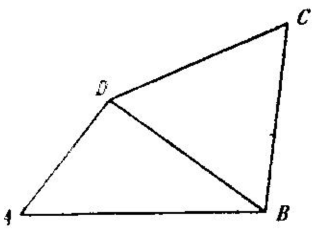

图 1

22．某校在六年级和九年级男生中分别随机抽取 20 名男生测量他们的身高，绘制的频数分布直方图如图 2 所示，其中两条点划线上端的数值分别是每个年级被抽 20 名男生身高的平均数，该根据该图提供的信息填空：

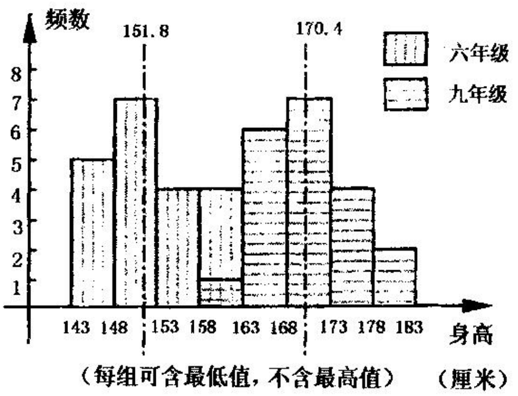

图 2

（1）六年级被抽取的 20 名男生身高的中位数所在组的范围是__________厘米；

九年级被抽取的 20 名男生身高的中位数所在组的范围是__________厘米.

（2）估计这所学校九年级男生的平均身高比六年级男生的平均身高高__________厘米.

（3）估计这所学校六、九两个年级全体男生中，身高不低于 153 厘米且低于 163 厘米的男生所占的百分比是__________.

四、（本大题共 4 题，每题 10 分，满 40 分）

23．已知：二次函数 $y=x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3$，其中 m 为实数.

（1）求证：不论 m 取何实数，这个二次函数的图象与 x 轴必有两个交点；

（2）设这个二次函数的图象与 x 轴交于点 A（x_1，0）．B（x_2，0），且 x_1、x_2 的倒数和为 $\dfrac{2}{3}$，求这个二次函数的解析式．

24．已知：如图 3，AB 是半圆 O 的直径，弦 $CD\mathbin{/\!/}AB$，直线 CM、DN 分别切半圆于点 C、D，且分别和直线 AB 相交于点 M、N．

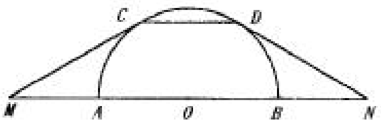

图 3

（1）求证：$MO=NO$；

（2）设 $\angle M=30°$，求证：$NM=4CD$．

25．某班进行个人投篮比赛，受污损的下表记录了在规定时间内设进 n 个球的人数分布情况：

进球数n	0	1	2	3	4	5
投进 n个球 的人数	1	2	7	[illegible]	[illegible]	2

同时，已知进球 3 个或 3 个以上的人平均每人投进 3.5 个球；进球 4 个或 4 个以下的人平均每人投进 2.5 个求，问投进 3 个球和 4 个求的各有多少人．

26．如图 4，直线 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 分别交 x、y 轴于点 A、C，P 是该直线上在第一象限内的一点，$PB\perp x$ 轴，B 为垂足，$S_{\triangle ABP}=9$．

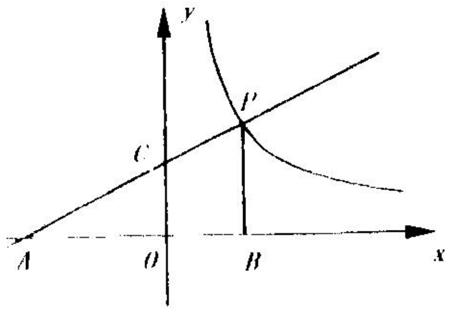

图 4

（1）求点 P 的坐标；

（2）设点 R 与点 P 的同一个反比例函数的图象上，且点 R 在直线 PB 的右侧，作 $RT\perp x$ 轴，T 为垂足，当△BRT 与△AOC 相似时，求点 R 的坐标.

五、（本大题只有 1 题，满分 12 分，（1）、（2）、（3）题均为 4 分）

27. **操作：**将一把三角尺放在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 上，并使它的直角顶点 P 在对角线 AC 上滑动，直角的一边始终经过点 B，另一边与射线 DC 相交于点 Q.

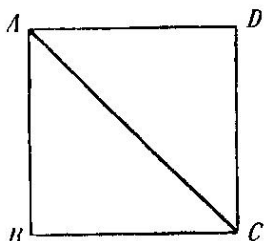

图 5

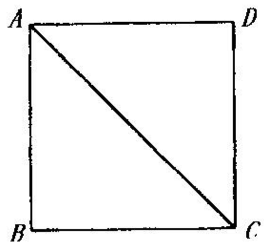

图 6

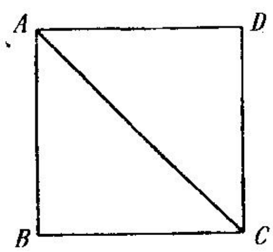

图 7

探究：设 A、P 两点间的距离为 x.

（1）当点 Q 在边 CD 上时，线段 PQ 与线段 PB 之间有怎样的大小关系？试证明你观察得到结论；

（2）当点 Q 在边 CD 上时，设四边形 $PBCQ$ 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数解析式，并写出函数的定义域；

（3）当点 P 在线段 AC 上滑动时，△PCQ 是否可能成为等腰三角形？如果可能，指出所有能使△PCQ 成为等腰三角形的点 Q 的位置，并求出相应的 x 的值；如果不可能，试说明理由.

（图 5、图 6、图 7 的形状大小相同，图 5 供操作、实验用，图 6 和图 7 备用）

数学试卷答案要点与评分说明

一．填空题（本大题共 14 题，每题 2 分，满分 28 分）

1．4；　　2．2；　　3．3.84×10^{11}；　　4．$x=1$；　　5．（3，－6）；

6．－2；　　7．$y^2+4y+1=0$；　　8．不合理；　　9．12；

10．$20\tan\alpha+1.5$；　　11．1；　　12．5；　　13．30；

14．$AB=AC$、$\angle B=\angle C$、$AE=AF$、$AE=ED$、$DE\parallel AC$、…中的一个

二、多项选择题（本大题共 4 题，每题 3 分，满分 12 分）

15．A、D；　　16．B、C　　17．A、B、C　　18．A、C

三、（本大题共 4 题，每题 7 分，满分 28 分）

19．解：原式$=\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)}-\dfrac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)}$ ……………………（4 分）

$=\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{2}{x-3}$ ……………………（2 分）

$=\dfrac{x-3}{x-3}=1$. ……………………（1 分）

20．

解: 由①解得　$x<3$ ……………………（3 分）

由②解得　$x\geqslant\dfrac{8}{3}$ ……………………（3 分）

∴　原不等式组的解集是　$\dfrac{8}{3}\leqslant x<3$ ……………………（1 分）

21．

解：∵　$\cos\angle ABD=\dfrac{4}{5}$

∴　设 $AB=5k$　$BD=4k$（$k>0$），得 $AD=3k$ ……………………（1 分）

于是 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BD=6k^2$ ……………………（2 分）

∵　$\triangle BCD$ 是等边三角形，

∴　$S_{\triangle BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BD^2=4\sqrt{3}k^2$ ……………………（2 分）

∴　$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}=6k^2:4\sqrt{3}k^2=\sqrt{3}:2$ ……………………（2 分）

22．（1）148～153 ……………………（1 分）

168～173 ……………………（1分）

（2）18.6 ……………………（2分）

（3）20.5% ……………………（3分）

四、（本大题共4题，每题10分，满分40分）

23．

（1）证明：

和这个二次函数对应的一元二次方程是 $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$

$\Delta=4(m-1)^2-4(m^2-2m-3)$ ……………………（1分）

$=4m^2-8m+4-4m^2+8m+12$ ……………………（1分）

$=16>0$. ……………………（1分）

∵ 方程 $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$ 必有两个不相等的实数根.

∴ 不论 m 取何值，这个二次函数的图象与 x 轴必有两个交点. ……………（1分）

（2）解：

由题意，可知 x_1、x_2 是方程 $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=2(m-1)$，$x_1\cdot x_2=m^2-2m-3$. ……………………（2分）

∵ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{3}$，即 $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{2}{3}$，∴ $\frac{2(m-1)}{m^2-2m-3}=\frac{2}{3}$（*） …………（1分）

解得 $m=0$ 或 $m=5$ ……………………（2分）

经检验：$m=0$，$m=5$ 都是方程（*）的解

∴ 所求二次函数的解析是 $y=x^2+2x-3$ 或 $y=x^2-8x+12$. ……………………（1分）

24．证明：连结 OC、OD.

（1）∵ $OC=OD$，∴ $\angle OCD=\angle ODC$ ……………………（1分）

∵ $CD\parallel AB$，∴ $\angle OCD=\angle COM$，$\angle ODC=\angle DON$.

∴ $\angle COM=\angle DON$ ……………………（1分）

∵ CM、DN 分别切半圆 O 于点 C、D，∴ $\angle OCM=\angle ODN=90°$. …（1分）

∴ $\triangle OCM\cong\triangle ODN$. ……………………（1分）

∴ $OM=ON$. ……………………（1分）

（2）由（1）$\triangle OCM\cong\triangle ODN$ 可得 $\angle M=\angle N$.

∵ $\angle M=30°$ ∴ $\angle N=30°$ ……………………（1 分）

∴ $OM=2OD$，$ON=2OD$，$\angle COM=\angle DON=60°$ ……………………（1 分）

∴ $\angle COD=60°$ ……………………（1 分）

∴ $\triangle COD$ 是等边三角形，即 $CD=OC=OD$. ……………………（1 分）

∴ $MN=OM+ON=2OC+2OD=4CD$. ……………………（1 分）

25．解：设投进 3 个球的有 x 个人，投进 4 个球的有 y 个人……………………（1 分）

由题意，得 $\begin{cases}\dfrac{3x+4y+5\times 2}{x+y+2}=3.5,\\ \dfrac{0\times 1+1\times 2+2\times 7+3x+4y}{1+2+7+x+y}=2.5.\end{cases}$ （*）……………………（4 分）

整理，得 $\begin{cases}x-y=6,\\ x+3y=18\end{cases}$ ……………………（2 分）

解得 $\begin{cases}x=9,\\ y=3\end{cases}$ ……………………（2 分）

经检验：$\begin{cases}x=9,\\ y=3\end{cases}$ 是方程组（*）的解.

答：投进 3 个球的有 9 个人，投进 4 个球的有 3 个人. ……………………（1 分）

26．解：

（1）由题意，得点 C（0，2），点 A（－4，0）. ……………………（2 分）

设点 P 的坐标为（a，$\frac{1}{2}a+2$），其中 $a>0$.

由题意，得 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}(a+4)(\frac{1}{2}a+2)=9$. ……………………（1 分）

解得 $a=2$ 或 $a=-10$（舍去） ……………………（1 分）

而当 $a=2$ 时，$\frac{1}{2}a+2=3$，∴ 点 P 的坐标为（2，3）. ……………………（1 分）

（2）设反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{k}{x}$.

∵ 点 P 在反比例函数的图象上，∴ $3=\dfrac{k}{2}$，$k=6$

∴ 反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{6}{x}$， ……………………（1 分）

设点 R 的坐标为（b，$\dfrac{6}{b}$），点 T 的坐标为（b，0）其中 $b>2$，

那么 $BT=b-2$，$RT=\dfrac{6}{b}$.

①当△RTB～△AOC 时，$\dfrac{RT}{AO}=\dfrac{BT}{CO}$，即 $\dfrac{RT}{BT}=\dfrac{AO}{CO}=2$， ………………（1 分）

∴ $\dfrac{\frac{6}{b}}{b-2}=2$，解得 $b=3$ 或 $b=-1$（舍去）.

∴ 点 R 的坐标为（3，2）. ……………………（1 分）

①当△RTB∽△COA 时，$\dfrac{RT}{CO}=\dfrac{BT}{AO}$，即 $\dfrac{RT}{BT}=\dfrac{CO}{AO}=\dfrac{1}{2}$， ………………（1 分）

∴ $\dfrac{\frac{6}{b}}{b-2}=\dfrac{1}{2}$，解得 $b=1+\sqrt{13}$ 或 $b=1-\sqrt{13}$（舍去）.

∴ 点 R 的坐标为（$1+\sqrt{13}$，$\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$）. ……………………（1 分）

综上所述，点 R 的坐标为（3，2）或（$1+\sqrt{13}$，$\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$）.

五、（本大题只有 1 题，满分 12 分，（1）、（2）、（3）题均为 4 分）

27.

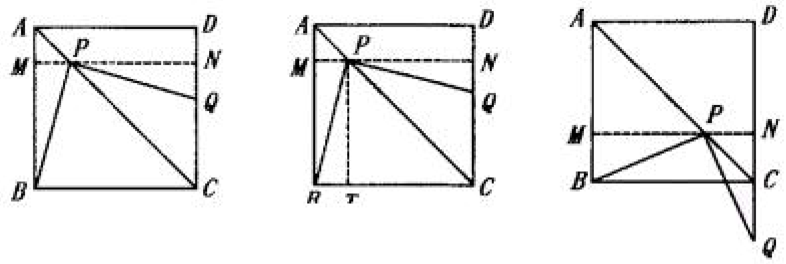

图 1　　　图 2　　　图 3

（1）解：$PQ=PB$ ……………………（1 分）

证明如下：过点 P 作 $MN // BC$，分别交 AB 于点 M，交 CD 于点 N，那么四边形 $AMND$ 和四边形 $BCNM$ 都是矩形，△AMP 和△CNP 都是等腰直角三角形（如图 1）.

∴ $NP=NC=MB$. ……………………（1 分）

∵ $\angle BPQ=90°$，∴ $\angle QPN+\angle BPM=90°$.

而$\angle BPM+\angle PBM=90°$，∴ $\angle QPN=\angle PBM$. ……………………（1 分）

又∵ $\angle QNP=\angle PMB=90°$，∴ △$QNP$≌△$PMB$. ……………………（1 分）

∴ $PQ=PB$.

（2）解法一

由（1）$\triangle QNP \cong \triangle PMB$．得 $NQ=MP$．

∵ $AP=x$，∴ $AM=MP=NQ=DN=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$BM=PN=CN=1-\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

∴ $CQ=CD-DQ=1-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x=1-\sqrt{2}x$．

得 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot BM=\frac{1}{2}\times 1\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}x$. ………………（1 分）

$S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}CQ\cdot PN=\frac{1}{2}\times\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}x^2$ （1 分）

$S_{\text{四边形}PBCQ}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1$.

即 $y=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1$（$0\leqslant x<\frac{\sqrt{2}}{2}$）. ……………………（1 分，1 分）

解法二

作 $PT\perp BC$，T 为垂足（如图 2），那么四边形 $PTCN$ 为正方形.

∴ $PT=CB=PN$.

又 $\angle PNQ=\angle PTB=90°$，$PB=PQ$，∴$\triangle PBT\cong\triangle PQN$.

$S_{\text{四边形}PBCQ}=S_{\triangle\text{四边形}PBT}+S_{\text{四边形}PTCQ}=S_{\text{四边形}PTCQ}+S_{\triangle PQN}=S_{\text{正方形}PTCN}$ … （2 分）

$=CN^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1$

∴ $y=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1$（$0\leqslant x<\frac{\sqrt{2}}{2}$）. ……………………（1 分）

（3）$\triangle PCQ$ 可能成为等腰三角形

①当点 P 与点 A 重合，点 Q 与点 D 重合，这时 $PQ=QC$，$\triangle PCQ$ 是等腰三角形，此时 $x=0$ ……………………（1 分）

②当点 Q 在边 DC 的延长线上，且 $CP=CQ$ 时，$\triangle PCQ$ 是等腰三角形（如图 3） ……………………（1 分）

解法一　此时，$QN=PM=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CP=\sqrt{2}-x$，$CN=\frac{\sqrt{2}}{2}CP=1-\frac{\sqrt{2}}{2}x$．

$\therefore$ $CQ=QN-CN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-$（$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$）$=\sqrt{2}x-1$.

当 $\sqrt{2}-x=\sqrt{2}x-1$ 时，得 $x=1$. ……………………（1 分）

解法二　此时 $\angle CPQ=\dfrac{1}{2}\angle PCN=22.5°$，$\angle APB=90°-22.5°=67.5°$，

$\angle ABP=180°-$（$45°+67.5°$）$=67.5°$，得 $\angle APB=\angle ABP$，

$\therefore$ $AP=AB=1$，$\therefore$ $x=1$. ……………………（1 分）